Leçon 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Développements :

Algorithme du gradient à pas optimal, Suite récurrente : convergence lente.

Bibliographie :

Gourdon, Rombaldi analyse réelle, Bernis, Ciarlet, Rouvière, Berthelin, Demailly, Allaire Kaber.

Rapport du jury 2018 :

Citer au moins un théorème de point fixe dans cette leçon est pertinent. Le jury attend d'autres exemples que la sempiternelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ (dont il est souhaitable de savoir expliquer les techniques sous-jacentes). La notion de points attractifs ou répulsifs peut illustrer cette leçon. L'étude des suites linéaires récurrentes d'ordre p est souvent mal connu, notamment le lien avec l'aspect vectoriel, d'ailleurs ce dernier point est trop souvent négligé. Le comportement des suites vectorielles définies par une relation linéaire $X_{n+1} = AX_n$ fournit pourtant un matériel d'étude conséquent. La formulation de cette leçon invite résolument à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse) d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton (avec sa généralisation au moins dans $\mathbb{R}^2$), algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'Euler,...

Rapport du jury 2017 :

Citer au moins un théorème de point fixe dans cette leçon est pertinent. Le jury attend d'autres exemples que la traditionnelle suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ (dont il est souhaitable de savoir expliquer les techniques sous-jacentes). La nouvelle formulation de cette leçon, qui sera en vigueur en 2017, invite à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse), d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de Newton, algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'Euler, . . . L'aspect vectoriel est souvent négligé. Par exemple, le jury attend des candidats qu'ils répondent de façon pertinente à la question de la généralisation de l'algorithme de Newton au moins dans $\mathbb{R}^2$, voire $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1 (Gourdon p192)**.** *On se place sur E un espace vectoriel réel normé.*

1 Généralités sur les suites récurrentes

1.1 Suites récurrentes

Définition 2 (Gourdon)**.** *On appelle suite récurrente d'ordre k une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n, .., u_{n-k+1}), \forall n \geq k$.*

Proposition 3 (Gourdon p193 bof)**.** *[Romb algèbre p620 bof] Soit $(u_n)_n$ une suite récurrente d'ordre k dans E, $u_{n+1} = f(u_n, .., u_{n-k+1})$. Alors la suite $(v_n)_n$ de E^k définie par $v_n = (u_n, .., u_{n+k-1})$ est récurrente d'ordre 1 pour $g((x_1, .., x_k)) := (f(x_1, .., x_k), x_2, .., x_k))$.*

Proposition 4 (Romb p617)**.** *i Structure d'espace vectoriel, unicité si défini par ses p premières valeurs.*

Proposition 5 (Gourdon p192)**.** *Si f est continue sur $I \subset E$ et si $u_n \to l \in I$, alors $f(u_n) \to f(l)$. (voir cas général)*

1.2 Suites récurrentes réelles d'ordre 1

Remarque 6. *Cadre :I intervalle de $\mathbb{R}$, E $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f : I \to E$, u est définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.*

Remarque 7. *Méthode pour résoudre traiter des suites récurrentes d'ordre 1 : trouver un sous-intervalle stable par f, puis étudier f sur cet intervalle.*

On suppose alors que $u_0 \in I$ avec I un fermé de E stable par f.

Proposition 8 (Gourdon p192)**.** *Soit (u_n) une suite récurrente d'ordre 1.*
1) Si f est croissante, (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par $sgn(u_1 - u_0)$.
2) Si f est décroissante, les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones de sens de monotonie opposés.

Exemple 9. *$u_{n+1} = \sin(u_n)$ décroit.*

Corollaire 10. *Si f est continue, alors les valeurs d'adhérence de $(u_n)_n$ sont des points fixes de f.*

Exemple 11. *$u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ tend vers $+\infty$.*

Exemple 12 (Rouvière ?). *$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$. Si (u_n) converge, sa limite est -1 ou 3.*

Proposition 13 (Ref ?). *Si f est croissante et continue sur I, si λ_1 et λ_2 sont deux points fixes consécutifs de f, alors $(u_n)_n$, $u_0 \in]\lambda_1, \lambda_2[$, converge vers λ_1 ou λ_2 selon que le graphe de f est au-dessous ou en-dessous de la diagonale.*

Exemple 14 (Gourdon p194). *Pour $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = 1/(2-\sqrt{u_n})$, on a $u_n \to 1$.*

Proposition 15 (Romb p266). *[FGN p86] Lemme de la grenouille : $I = [0,1]$, $f : I \to I$ continue, $u_0 \in I$. Alors (u_n) converge si et seulement si $u_{n+1} - u_n \to 0$.*

Contre exemple 16. *$f(x) = 1 - x$ et $u_0 = 0$. alors $u_{2n} = 0$ et $u_{2n+1} = 1$.*

Définition 17 (Gourdon p193). *Suites arithmétiques : $u_{n+1} = u_n + a$. Converge si et seulement si $a = 0$.*

Définition 18 (Gourdon p193). *Suites géométriques : $u_{n+1} = Au_n$ où A application linéaire.*

Définition 19 (Gourdon p193). *Suites arithmético-géométriques : $u_{n+1} = Au_n + B$.*

Si $A = Id$, u_n est arithmétique de raison 1.

Si $Id - A$ est inversible, $v_n = u_n - B(Id-A)^{-1}$ est géométrique de raison A, et $u_n = A^n(u_0 - B(Id-A)^{-1}) + B((Id-A)^{-1})$.

1.3 Suites vectorielles linéaires

Proposition 20. *Dans le cas où f est une application linéaire de $E^k \to E$ ($(u_n)_n$ est récurrente linéaire), g est alors une application linéaire ($(v_n)_n$est récurrente linéaire d'ordre 1).*

Pour $E = \mathbb{R}$, f est une forme linéaire donnée par un vecteur $(x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k$ et g est la matrice compagnon associée à $(x_1, .., x_k)$.

Remarque 21. *On peut ainsi toujours ramener l'étude d'une suite récurrente à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 1 : : se ramener à une suite vectorielle $X_{n+1} = AX_n$ où A est une matrice compagnon.*

Proposition 22. *On obtient $X_n = A^n X_0$. On peut alors diagonaliser A ou utiliser un polynôme annulateur.*

Proposition 23. *Méthode de variation des constantes pour calculer $X_{n+1} = AX_n + b$.*

Exemple 24 (Delaunay MPSI).

Définition 25 (Gourdon p194). *[Romb algèbre p618] Equation caractéristique associée à une suite récurrente linéaire.*

Proposition 26 (Gourdon p194). *[Romb algèbre p619] Donner la forme générale de ces suites à partir des racines du polynôme caractéristique : c'est la réduction de Jordan.*

Exemple 27. *En dimension 2 avec $X^2 - X - 1$, suite de Fibonacci.*

Remarque 28. *Il n'y a pas de méthode générale sinon, c'est du cas par cas pour les suites vectorielles d'ordre 1.*

1.4 Convergence et comportement asymptotique

Proposition 29 (Bernis). *[FGN][Romb] La méthode des "petits pas" pour trouver un équivalent de u_n à partir d'un DL de f.*

Application 30 (Bernis). *Convergence lente avec* ln *et* exp.

Exemple 31. *Equivalent donnant la vitesse de convergence pour $f(x) = sin(x)$. Celle-ci est basse.*

Application 32 (Ciarlet). *Sur $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $x_{k+1} = Ax_k$. Alors (x_k) converge si et seulement si $\rho(A) < 1$. (Utilise Picard ?)*

Application 33. *(Résolution de systèmes linéaires). Résolution d'un système linéaire, caractérisation de la convergence de la méthode.*

2 Suites récurrentes et points fixes

Remarque 34. *On suppose maintenant que E est en plus complet.*

2.1 Théorème de point fixe de Picard et applications

Théorème 35 (Rouvière p147). *Théorème du point fixe de Picard : Pour F un fermé de E et $f : F \to F$ qui est k-Lipschitzienne, $k < 1$, f admet un unique point fixe s dans F et toute suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers s. On a même : $|u_n - s| \leq k|u_{n-1} - s| \leq k^n/(1-k)|u_0 - s|$. (vitesse de convergence linéaire (plutôt géométrique non ?).*

Remarque 36 (Rouvière p169). *Le théorème est aussi vrai s'il existe un n tel que $f \circ .. \circ f$ est k-Lipschitzienne.*

Application 37 (Bernis). *[Berth] Théorème de Cauchy-Lipschitz. Soit $F : I \times U \to \mathbb{R}^n$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et un ouvert de U de $\mathbb{R}^n$, localement Lipschitz en sa seconde variable, et soit $(t_0, x_0) \in I \times U$. Alors il existe (Y, J) où J est un intervalle inclus dans I et $Y \in C^1(J, U)$ avec $\forall t \in J, Y'(t) = F(t, Y(t))$ et $Y(t_0) = x_0$. (solution du problème de Cauchy de l'ED associée à F). De plus, pour (f, J_1) et (g, J_2) solutions du problèmes de Cauchy, $f = g$ sur $J_1 \cup J_2$.*

Contre exemple 38 (Rouvière p148). *$f(x) = x/2$ sur $]0,1[$ non fermé.*

Contre exemple 39 (Rouvière p148). *$f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $[0, +\infty[$ est 1-Lipschitz.*

Contre exemple 40 (Rouvière p148). *$f(x) = \sin(x)$ sur $[0, \pi/2]$.*

Application 41 (Demailly p95). *Pour $\Phi(x) = x - cf(x)$, $c \neq 0$, on a $\Phi(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$. On peut alors faire varier c et l'intervalle I pour essayer de rendre Φ k-Lipschitzienne afin de pouvoir approximer son point fixe, et ainsi approximer un zéro de f.*

Théorème 42 (Rouvière p171). *Théorème de point fixe compact.*

Contre exemple 43.

2.2 Classification des points fixes

Définition 44 (Demailly p96). *[Rouvière p150] Points fixes attractif, super-attractif, répulsif.*

Remarque 45. *Les dessins sont dans le Rouvière.*

Proposition 46 (Demailly p96). *Dans le cas où $|f'(a)| = 1$, on ne peut pas conclure :* sin *et sinh.*

Contre exemple 47. *Si $f(x) = 1 - x$, le point fixe $1/2$ n'est ni attractif, ni répulsif.*

Remarque 48 (Demailly p96). *Un point fixe répulsif de f est un point fixe attractif de f^{-1}.*

Remarque 49. *Quelques dessins pour $\sqrt{1+x}, x^2, e^{2x-1}$.*

Proposition 50 (Demailly p107). *Critère d'attractivité.*

Remarque 51 (Demailly p108). *Si $df(a) = 0$, on a toujours convergence quadratique.*

3 Méthodes numériques itératives à un pas

3.1 Méthode de Newton

Proposition 52 (Rouvière). *Méthode de Newton sur $\mathbb{R}$.*

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$. On se donne $x_0 \in I$, et on pose $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$. S'il existe $\delta > 0$ tel que f soit de classe C^2 sur $]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$et si f' ne s'annule pas sur cet intervalle, alors pour tout $x_0 \in]\alpha - \delta, \alpha + \delta[$, la suite converge quadratiquement vers α.

Application 53 (Rouvière). *Recherche d'une racine carrée.*

Si $\alpha > 0$, la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = 1/2(u_n + \alpha/u_n)$ converge vers $\sqrt{\alpha}$.

Contre exemple 54. *La fonction $f(x) = \arctan(x)$ montre qu'il n'y a pas convergence globale en général.*

Proposition 55. *Méthode de Newton polynomiale.*

Proposition 56 (Demailly). *[Allaire] Cas vectoriel.*

La méthode de Newton peut être appliquée à des fonctions $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ avec U ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour lesquelles on a $x \in U$ tel que $\phi(x) = 0$, ϕ est de classe C^2 sur U, et $d\phi(x)$ inversible. Il existe alors un voisinage V de x sur lequel $\phi : x \in V \mapsto x - (d\phi(x))^{-1}(\phi(x)) \in V$ est bien définie, et pour tout $u_0 \in V$, $u_{n+1} = \phi(u_n)$ va converger quadratiquement vers x.

3.2 Méthode du gradient

Remarque 57. *But : On remplace la recherche de la solution à $Ax = b$ par la recherche d'un minimum local à la fonction $< Ax, x > - < b, x >$, pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.*

Proposition 58. *Méthode du Gradient à pas optimal.*

3.3 Résolution de systèmes linéaires

Remarque 59. *Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$, $b \in \mathbb{C}^n$. On cherche à résoudre le problème $Ax - b = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{C}^n$.*

Définition 60 (Allaire K p155). *[Filbet p35] Décomposition régulière. On écrit $A = M - N$ avec M inversible (et surtout facile à inverser ! par exemple diagonale, triangulaire, orthogonale...).*

Définition 61 (Allaire K p155). *Une méthode itérative basée sur la décomposition régulière est définie par ..*

Remarque 62 (Allaire K p155). *On remplace la résolution d'un seul système $Ax = b$ en une suite de plusieurs systèmes $My = c$. Il faut donc que M soit beaucoup plus facile à inverser.*

Remarque 63 (Allaire K p155). *Résoudre le système est équivalent à résoudre $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$.*

Proposition 64 (Allaire K p155). *Si la suite (x_n) converge, c'est nécessairement vers un point fixe de l'application $x \mapsto M^{-1}Nx + M^{-1}b$ par continuité de cette dernière. Or cette application ne possède qu'un point fixe, qui n'est autre que l'unique solution du système.*

Définition 65 (Allaire K p156). *Méthode convergente.*

Proposition 66 (Allaire K p156). *La méthode converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.*

Proposition 67. *Critère de convergence : si $M^* + N$ est définie positive.*

Exemple 68 (Allaire K). *[Romb analyse matricielle] On note D la partie diagonale de A, E sa partie triangulaire inférieure, F sa partie triangulaire supérieure.*

La méthode de Jacobi est associée à la décomposition $M = D, N = E + F$.

La méthode de Gauss-Seidel est associée à la décomposition$M = D - E, N = F$.

La méthode de relaxation est associée ...

Proposition 69 (Romb analyse matricielle). *Si A est à diagonale strictement dominante, Jacobi et Gauss Siedel convergent.*

Proposition 70 (Romb). *Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, la méthode de Gauss Siedel converge.*

Proposition 71. *Si $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, la méthode de relaxation converge si et seulement si $w \in]0, 2[$.*

Application 72 (Allaire K p164). *La résolution de problèmes linéaires associés à la matrice du Laplacien $1D$ peut se faire par Jacobi et Gauss-Seidel.*

Remarque 73 (Ciarlet). *Comparaison des méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel.*

Comparaison des méthodes de Jacobi et de relaxation.

Pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tridiagonale par blocs, les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation pour $0 < w < 2$ convergent. Et il existe un et un seul paramètre de relaxation optimal.

3.4 Méthode de la puissance

Proposition 74 (Allaire K p216). *[Romb analyse matricielle p238] Algorithme de la méthode la puissance.*

Proposition 75. *Théorème de convergence (avec la vitesse de convergence). (Attention, il y a des conditions différentes sur la matrice selon les livres.)*

Proposition 76. *Méthode de la puissance inverse : déterminer la plus petite valeur propre en appliquant cette méthode à A^{-1}.*

Proposition 77. *Théorème de convergence de la puissance inverse (avec les vitesses de convergence).*

Remarque 78 (Allaire K p219). *Pour accélérer la convergence, on remplace A par une matrice translatée $A - \mu Id$ avec μ une approximation de la plus petite valeur propre.*